

FINAL KONKURSU PIRAMIDA

ZADANIA Z MATEMATYKI

1. Wykaż, że jeżeli m spełnia równanie $2\log 2 + (1 + \frac{1}{2m})\log 3 - \log(3^{\frac{1}{m}} + 27) = 0$,
to nierówność $-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
2. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $a_n = \binom{n}{0} + \frac{1}{n^2 + 2} \binom{n}{2} - \frac{1}{n^3 + 1} \binom{n+1}{2}$
3. Dla jakich wartości parametru α układ równań $\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = 1 \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0 \end{cases}$
ma rozwiązanie (x, y) , takie że punkt $P(x, y)$ należy do krzywej $x^2 + y - 1 = 0$?
4. Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu $x^2 + (y + 2)^2 = 9$ i jednocześnie stycznych do prostej $k: y - 4 = 0$.
5. Krawędź sześcianu ma długość a . Na każdej krawędzi tego sześcianu obrano dwa punkty, które dzielą krawędź na trzy równe odcinki.
 - a) Wykaż, że 24 obrane w ten sposób punkty należą do sfery współśrodkowej ze sferą opisaną na sześcianie.
 - b) Oblicz objętość bryły ograniczonej tymi sferami.